

Maturité gymnasiale

Session 2026

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES
OS scientifiques

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 75 points sur 80
« Formulaires et Tables » à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

Problème 1. Algèbre linéaire (15 points)

Soient $p \in \mathbb{R}$ un paramètre et h_p un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini dans la base canonique par la matrice

$$M_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p & p+1 \end{pmatrix}$$

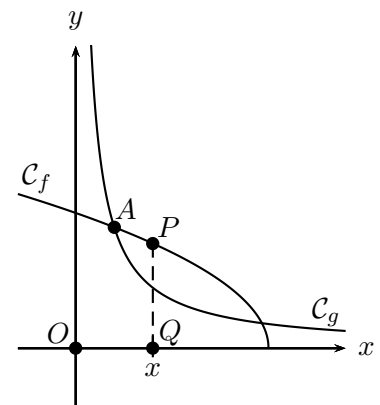
1. Dans cette partie, on pose $p = 5$.
 - a) Calculer l'image de $(2; -1)$ par h_5 .
 - b) Calculer le point $(x; y)$ ayant pour image $(3; 7)$ par h_5 .
 - c) Calculer les valeurs propres et sous-espaces propres associés de h_5 .
 - d) Donner une base de vecteurs propres, ainsi que la matrice D_5 de h_5 relativement à cette base.
 - e) Interpréter géométriquement h_5 .
2. Dans cette partie, p est à nouveau un nombre réel quelconque.
 - a) Il existe exactement une valeur de p pour laquelle M_p n'est pas diagonalisable. Déterminer cette valeur et justifier la réponse donnée.
 - b) Pour cette valeur de p , donner $(M_p)^n$ pour $n \geq 1$.

Problème 2. Analyse (20 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

A. On considère les fonctions $f(x) = \sqrt{5-x}$ et $g(x) = \frac{2}{x}$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de ces fonctions.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
2. Vérifier que le point $A(1; 2)$ est à l'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
3. Calculer l'angle aigu formé par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ au point A .
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A .
5. Calculer le volume du solide engendré par la révolution de la courbe $\mathcal{C}_f$ autour de l'axe des abscisses entre les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 5$.
6. Soit P un point d'abscisse x positive situé sur la courbe $\mathcal{C}_f$ et Q sa projection orthogonale sur l'axe des abscisses. Déterminer l'aire maximale du triangle POQ .



B. Résoudre l'équation différentielle $y'x = 2\sqrt{y}\ln(x)$.

(suite au verso)

Problème 3. Étude de fonction (15 points)

Étudier, sans la dérivée seconde, puis représenter (unité : 1 cm) la fonction f donnée par $f(x) = \frac{2e^x}{3-x^2}$.

Problème 4. Probabilités (15 points)

Un site internet propose tous les jours 24 nouvelles grilles de jeux solitaires : Sudoku, Kakuro et Binox. (peu importe ce que sont ces jeux ici) selon la répartition ci-dessous, ainsi que le niveau de difficulté.

	facile	difficile	total
Sudoku	5	7	12
Kakuro	3	4	7
Binox	2	3	5
total	10	14	24

Chaque matin, Monsieur Mouton remplit 4 grilles au hasard. Il affirme passer une journée *tanoshii* lorsqu'il remplit 2 grilles de Sudoku, 1 grille de Kakuro et 1 grille de Binox.

1. Pour un jour quelconque, calculer la probabilité des événements suivants.

A : M. Mouton passe une journée *tanoshii*. Montrer que $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{23}$.

B : M. Mouton ne remplit aucune grille de Kakuro.

C : M. Mouton remplit exactement 2 grilles de Sudoku ou exactement 2 grilles de Kakuro.

2. Sachant que M. Mouton n'a rempli ce matin aucune grille de Kakuro, calculer la probabilité qu'il ait rempli exactement 2 grilles de Sudoku.
3. M. Mouton décide de jouer chacun des 7 jours de la semaine, toujours selon le même protocole : il remplit au hasard 4 grilles parmi les 24 proposées chaque jour. Calculer alors la probabilité des événements suivants.

D : il passe exactement 3 journées *tanoshii* dans la semaine.

E : il passe au moins 2 journées *tanoshii* dans la semaine.

4. Chaque soir, Madame Mouton remplit 2 grilles au hasard, provenant du même site internet. Elle prend 20 minutes pour remplir une grille facile tandis qu'elle a besoin de 1 heure pour remplir une grille difficile. Calculer le temps moyen que Madame Mouton passe chaque jour à remplir ces 2 grilles.

Problème 5. Géométrie dans l'espace (15 points)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les quatre points $A(4; -1; 4)$, $B(2; -3; 5)$, $C(7; 5; -2)$ et $D(1; -7; -7)$, le plan $\pi : -4x + 6y + 4z + 7 = 0$ et la sphère d'équation $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 12z + 46 = 0$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
2. Montrer que le plan (ABC) est strictement parallèle au plan π .
3. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (ABC) passant par D .
4. Calculer les coordonnées du point B' de la droite d le plus proche du point B .
5. Déterminer les coordonnées du centre Ω de la sphère Σ , ainsi que son rayon.
6. Montrer que le point B appartient à la sphère Σ .
7. Donner une représentation paramétrique de la droite t tangente à la sphère Σ au point B et coupant l'axe des abscisses.