

Maturité gymnasiale

Session 2026

Examen de l'option complémentaire Application des mathématiques

Temps à disposition : 3 heures

Note maximale (6) pour 49 points sur 52

« Formulaires et Tables » à disposition

Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

Problème 1. Calcul matriciel (5,5 + 7 points)

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

A. Soit le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - 5y + z = -1 \\ -x + 7y + az = 3 \end{cases}.$$

où a est un paramètre réel.

- Donner la matrice augmentée associée à ce système.
- Échelonner cette matrice : en déduire la valeur de a pour laquelle le système n'admet pas de solutions.
- On pose $a = -1$. Déterminer la forme échelonnée réduite de la matrice puis donner l'ensemble de solutions du système.

B. On se donne pour clé d'un chiffrement de Hill la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 24 & 1 \\ 13 & 16 & 10 \\ 20 & 17 & 15 \end{pmatrix}.$$

- Calculer le déterminant de A (mod 26) et justifier l'inversibilité de A .
- Vérifier par calcul que la matrice inverse de A est $A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 10 \\ 21 & 8 & 21 \\ 21 & 12 & 8 \end{pmatrix}$.
- Déchiffrer le mot « **FKA** ».

Voici un tableau à utiliser pour les conversions.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Problème 2. Variables aléatoires et statistiques (8,5 + 6 points)

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

A. Dans un musée, on suppose que la variable aléatoire qui donne la durée de visite d'une personne suit une loi normale, de moyenne 90 minutes et d'écart-type 15 minutes.

1. Calculer le pourcentage des visiteurs qui restent dans le musée plus de deux heures.
2. Calculer le pourcentage des visiteurs qui restent dans le musée entre 70 et 100 minutes.
3. Louise se rend au musée et on sait que 20% des visiteurs y restent plus longtemps qu'elle.
Calculer la durée de la visite de Louise.

B. Dans la population générale, la répartition entre les quatre groupes sanguins se présente ainsi :

O	A	B	AB
47%	43%	7%	3%

Un centre hospitalier mène une étude sur une nouvelle maladie. Sur 200 malades observés, les effectifs suivants ont été dénombrés :

O	A	B	AB
104	76	18	2

Afin de savoir si la répartition observée dans l'échantillon est conforme à la répartition dans la population générale, un test du χ^2 est effectué au niveau $\alpha = 5\%$.

1. Formuler l'hypothèse H_0 relative à ce test.
2. Montrer que le test du χ^2 est effectivement applicable (citer le critère vu en cours).
3. Calculer la statistique T du test.
4. Déterminer le χ^2 critique puis conclure le test.

Problème 3. Analyse numérique (10 points)

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = x - e^{-x}.$$

1. Montrer que f possède un unique zéro dans $\mathbb{R}$ et qu'il est situé dans l'intervalle $[0; 1]$.
2. On veut résoudre l'équation $f(x) = 0$ grâce à la méthode de Newton.
Choisir la valeur initiale x_1 pour l'algorithme, en justifiant.
3. Utiliser la méthode de Newton pour estimer le zéro de f (précision : 10^{-3}).
Noter les valeurs obtenues à chaque itération et justifier brièvement l'arrêt de l'algorithme.

Supposons qu'on veuille calculer une valeur approchée du zéro de f avec la méthode de dichotomie et $[0; 1]$ comme intervalle initial.

4. Calculer le nombre minimal d'itérations à effectuer pour une erreur absolue inférieure à 10^{-3} .

Problème 4. Nombres complexes (8,5 + 6,5 points)

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

A. Soit la fonction polynomiale $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = z^3 + (1 - 5i)z^2 - 2(5 + i)z + 8i.$$

1. Calculer $f(2i)$.
2. En déduire que $f(z)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(z) = (z - 2i)(z^2 + uz + v)$$

où u et v sont deux nombres complexes à déterminer.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. Noter l'ensemble de solutions.

B. Soit les nombres complexes

$$z_0 = -2 ; z_1 = 2 + 2i ; z_2 = 2 - 2i.$$

1. Calculer le module et un argument de z_0 , z_1 et z_2 .
Noter ensuite ces nombres complexes dans la forme $r \operatorname{cis}(\theta)$.
2. En déduire une forme trigonométrique du nombre complexe

$$w = \frac{z_0 \cdot z_1^2}{z_2^3}.$$

3. Calculer, grâce au résultat trouvé en (2), la forme algébrique de w .