JURA CH RÉPUBLIQUE ET CANTON DU JURA

CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Maturité gymnasiale **Session 2024**

Examen de mathématiques
OS non scientifiques

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 75 points sur 80
« Formulaires et Tables » à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

---

Problème 1. Étude de fonction (20 points)

Étudier puis représenter (unité : 1 carré) la fonction f définie par

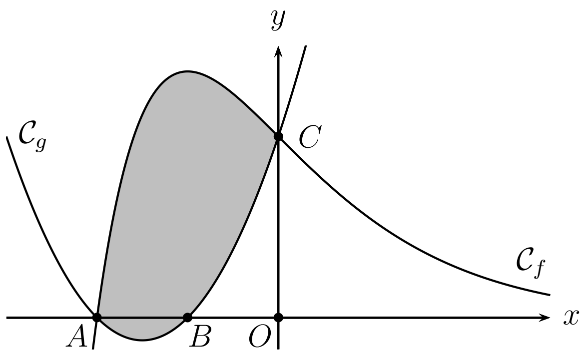
$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2 - 3x + 4}.$$

À utiliser, **mais à ne pas calculer**

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(17x^2 - 86x + 89)}{(x^2 - 3x + 4)^3}.$$

Problème 2. Analyse (20 points)

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = (x+2)e^{-x}$ et $g(x) = x^2 + 3x + 2$ dont les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont esquissées ci-dessous dans un repère orthonormé.



1. Calculer les coordonnées des points d'intersection A, B et C de la courbe $\mathcal{C}_g$ avec les axes.
2. Vérifier que les points A et C sont aussi des points de la courbe $\mathcal{C}_f$.
3. Calculer les coordonnées du maximum de $\mathcal{C}_f$.
4. Déterminer l'équation de la droite (BC).
5. Calculer la valeur de x pour laquelle la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse x est parallèle à la droite (BC).
6. Calculer l'aire du domaine grisé.
7. Soit P un point d'abscisse positive x de la courbe $\mathcal{C}_f$. Soit également le point H de l'axe Ox de même abscisse que P.

   Calculer la valeur de x pour que l'aire du triangle BHP soit maximale.

(suite au verso)

Problème 3. Géométrie dans l'espace (20 points)

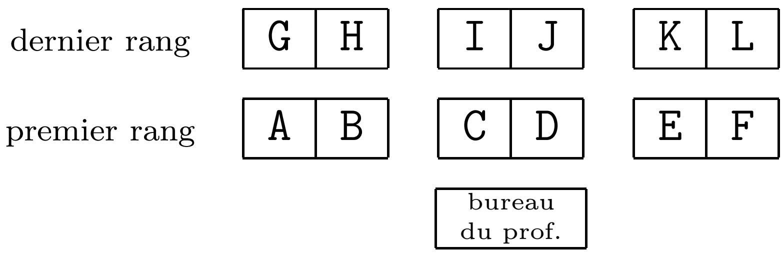
Dans un repère orthonormé, on donne la droite $d : \begin{cases} x = 6 + 3\lambda \\ y = 4 - 4\lambda \\ z = -15 + 11\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R},$

ainsi que les points $A(3;2;5)$ et $B(3;8;-26)$.

1. Montrer que le point B appartient à la droite d.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
3. Déterminer l'angle aigu entre les droites d et (AB).
4. Déterminer l'équation du plan α passant par le point A et orthogonal à la droite d.
5. Calculer la distance du point A à la droite d.
6. Calculer les coordonnées des points P et Q appartenant à la droite d qui sont à une distance 11 du point A.
7. Déterminer l'équation de la plus petite sphère contenant le point A et tangente à la droite d.

Problème 4. Probabilités (20 points)

Une classe de lycée est constituée de 11 élèves : 2 garçons, nommés Balthazar et Melchior, et 9 filles, dont Bénédicte. Chaque jour d'école, du lundi au vendredi, cette classe assiste à une heure de mathématiques. Les élèves s'installent au hasard dans une salle de 6 tables à deux places ayant cette configuration.



1. Calculer le nombre de manières que les élèves ont de s'installer.
2. Montrer que la probabilité que les garçons soient tous les deux au premier rang vaut $p = \frac{5}{22}$.
3. Calculer la probabilité que Melchior occupe la place `A` et Balthazar la place `D`.
4. Calculer la probabilité que les garçons soient à la même table.
5. Calculer la probabilité que Balthazar ne soit pas à la même table que Bénédicte.
6. Calculer la probabilité que Bénédicte soit au premier rang sachant que Melchior occupe une place au dernier rang.
7. Un jour donné, Balthazar est absent. Calculer la probabilité que les places `C` ou `D` soient libres ce jour-là.
8. Calculer la probabilité que sur les 5 jours de la semaine, les garçons soient tous les deux au premier rang exactement deux jours.
9. Calculer le nombre minimum de jours d'école pour avoir une probabilité d'au moins 99% que les garçons soient tous les deux au premier rang au moins une fois.