CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Maturité gymnasiale — Session 2024

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES
OC mathématiques

Temps à disposition : 3 heures
Note maximale (6) pour 51 points sur 55
Fascicule « Formulaires et Tables » à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée.

Problème 1. Algèbre linéaire (16 pts)

Un biologiste a modélisé la dynamique annuelle d'une population de hérissons par un endomorphisme h dont la matrice de Leslie, relativement à la base canonique, est la suivante :

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Initialement, la population compte 640 hérissons d'un an et 200 de deux ans

1. Donner une interprétation des éléments non nuls de la matrice L par rapport à la population modélisée.
2. Calculer la population de hérissons dans chaque classe d'âge après un an, après deux ans.
3. Calculer les valeurs propres de h et les sous-espaces propres associés.
4. a) Donner une base de vecteurs propres de h et exprimer la matrice diagonale de h, notée D, relativement à cette base.
   b) Donner l'expression de D^n.
5. a) A l'aide d'un changement de base adéquat, déterminer l'expression de L^n.
   b) Indiquer comment la population de hérissons va se répartir à long terme.

Problème 2. Statistiques (14 pts)

Les deux parties A et B de ce problème sont indépendantes.

Partie A

On veut estimer la consommation (exprimée en kWh par 100 km) d'un modèle de voiture électrique. Pour un échantillon de 16 voitures de ce modèle, on a obtenu une consommation moyenne de 15,86 kWh par 100km et un écart type de 0,59 kWh par 100km.

On souhaite construire et interpréter un intervalle de confiance permettant d'estimer la consommation moyenne de ce modèle de voiture avec un niveau de confiance de 99%.

1. Expliquer pourquoi il est nécessaire d'utiliser une loi de Student.
2. Calculer l'écart type $\sigma_{\overline{X}}$ de la distribution d'échantillonnage de la moyenne.
3. Calculer la marge d'erreur et donner l'intervalle de confiance correspondant au niveau de confiance souhaité.
4. Interpréter l'intervalle de confiance obtenu dans le contexte de cette étude.

Partie B

Roger adore jouer au tennis. Il se demande s'il y a un lien entre la surface du terrain sur lequel il joue au tennis et le fait de gagner ou non son match.

On réalise donc un test d'indépendance du χ^2 au seuil de signification de 2,5% pour savoir si les données de 200 matchs de Roger permettent de conclure qu'il y a un lien entre la surface de jeu et l'issue du match lorsqu'il joue.

1. Formuler les hypothèses H_0 et H_1 relatives à ce test d'indépendance.
2. Compléter ci-dessous le tableau des fréquences et pourcentages théoriques et indiquer si la condition d'application du test est vérifiée.

$O \mid T$	Issue du Match		
Surface de jeu	Victoire	Défaite	TOTAL
Terre Battue	25 |	9 |	34
Terrain Béton	58 |	8 |	66
Revêtement synthétique	31 |	11 |	42
Gazon	51 |	7 |	58
Total (% T)	165 (%)	35 (%)	200

3. Calculer le χ^2 critique.
4. Indiquer la règle de décision de ce test.
5. Calculer la valeur du χ^2, indiquer la décision à prendre et conclure.

Problème 3. Calculs matriciels et financiers (15 pts)

Les deux parties A et B de ce problème sont indépendantes.

Partie A

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Expliquer pourquoi la matrice M peut servir de matrice à un chiffrement de Hill.
2. Déterminer sa matrice inverse modulo 26. Faire une vérification.

Partie B

1. Un capital de CHF 7'300.- placé à un taux d'intérêt annuel de 4% a rapporté CHF 108,69.
   Calculer le nombre de jours de placement.
2. Un capital de CHF 9'000.- est placé pendant 5 mois. L'intérêt produit s'élève à CHF 195.-
   Calculer le taux d'intérêt annuel.
3. Un capital de CHF 30'000.- placé à un taux d'intérêt annuel de 5,3% a acquis une valeur de CHF 45346,96. La capitalisation des intérêts est annuelle.
   Calculer le nombre d'années de placement.
4. On désire constituer un capital de CHF 100'000.- en 120 mois. On verse au début de chaque mois la même somme. Les intérêts sont capitalisés mensuellement au taux d'intérêt de 0,2%.
   Calculer la somme à verser mensuellement.

Problème 4. Equations différentielles (10 pts)

La population N(t) de truites d'une rivière présente les caractéristiques suivantes. Sa variation $N'(t)$ par rapport au temps est égale au taux de renouvellement de 4% des truites par an moins le taux de mortalité (naturelle + pèche) de 9% des truites par an (t est donnée en année).

1. Modéliser cette situation et résoudre l'équation différentielle obtenue.

2. Afin d'organiser la survie de cette population, on ajoute régulièrement des truites dans la rivière. La situation décrite plus haut est modifiée et peut à présent être modélisée par l'équation différentielle suivante :

$$N'(t) = \frac{-5}{100} N(t) + 500.$$

   Résoudre cette équation différentielle en tenant compte du fait qu'initialement (pour t=0) 6000 truites vivent dans cette rivière.

3. La solution trouvée à la question 2. peut s'écrire $N(t) = 2000\left(5 - 2e^{-0,05t}\right)$.

   3.1 Calculer le nombre d'années nécessaires pour que la population de truites dépasse 7500.
   3.2 Calculer le nombre de truites dans cette rivière à long terme.