CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Maturité gymnasiale **Session 2023**

Examen de mathématiques
OS non scientifiques

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 75 points sur 80 (20 points par problème)
« Formulaires et Tables » à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

---

Problème 1. Étude de fonction

Étudier, y compris la dérivée seconde, puis représenter (unité : 4 carrés) la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{20\ln(x)}{x^2}.$$

Problème 2. Probabilités

Monsieur Mouton, mal réveillé, ouvre son réfrigérateur tous les matins pour y prendre au hasard 3 pots de confiture indiscernables au toucher, parmi les 10 qui s'y trouvent, selon les catégories suivantes :

- fruits rouges : cerise, fraise et framboise (3 sortes) ;
- fruits jaunes : mirabelle et abricot (2 sortes) ;
- fruits exotiques : goyave, fruit de la passion, ananas, figue et mangue (5 sortes).

Il utilise ces trois confitures pour se préparer trois tartines, chacune avec une seule sorte de confiture. Il mange ensuite les trois tartines.

Dès qu'un pot est vide, il est remplacé par un nouveau pot plein avec la même sorte de confiture.

1. Montrer que la probabilité qu'un jour donné, il mange de la confiture de mangue vaut $\frac{3}{10}$.
2. Montrer que la probabilité qu'il mange une confiture de chacune des trois catégories vaut $\frac{1}{4}$.
3. Calculer la probabilité qu'il mange au moins une confiture de fruits rouges.
4. Calculer la probabilité qu'il mange de la confiture de mangue ou de cerise.
5. Calculer la probabilité qu'il mange de la confiture de mangue et d'au moins un fruit rouge.
6. Calculer la probabilité qu'il mange de la confiture de mangue sachant qu'il n'a pas mangé de confiture de fruits rouges.

Tous les matins, il procède de la même manière : il prend 3 pots parmi les 10 réfrigérés.

7. Calculer la probabilité que sur une semaine (lundi à dimanche), il ait mangé de la confiture de mangue exactement 2 jours.
8. Calculer la probabilité que sur une semaine (lundi à dimanche), il ait mangé de la confiture de mangue exactement 3 jours et exclusivement les confitures de fruits rouges exactement 2 jours.
9. Calculer le nombre minimum de jours pour que la probabilité d'avoir mangé au moins une fois de la confiture de mangue soit supérieure à 99%.

(suite au verso)

Problème 3. Géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les quatre points $A(9;9;-4)$, $B(-11;5;0)$, $C(-12;5;4)$ et $D(-10;7;-2)$.

1. Établir une équation cartésienne du plan π contenant la droite (CD) et passant par le point B.
2. Montrer que le point A n'appartient pas au plan π.
3. Calculer l'angle aigu d'intersection entre la droite (AB) et le plan π.
4. Établir une représentation paramétrique de la droite d passant par le point B et orthogonale au plan π.
5. Calculer la distance du point A à la droite d.
6. Calculer les coordonnées du point P de la droite d le plus proche du point A.
7. a) Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$.

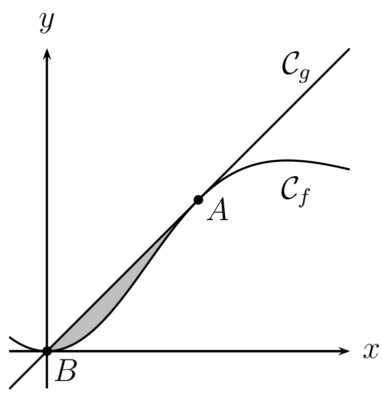
   b) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère Σ passant par A et tangente au plan π au point B.

Problème 4. Analyse

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

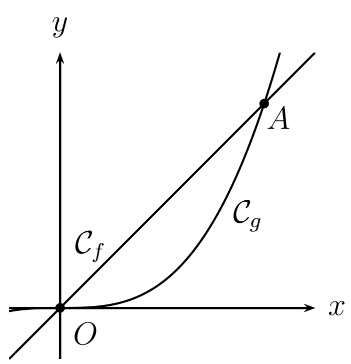
On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{6x^2}{x^3+2}$ et $g(x) = 2x$ dont les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont esquissées ci-contre dans le premier quadrant d'un repère non orthonormé. Les points A et B sont des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$.



1. Montrer que la fonction f admet un maximum dans le premier quadrant puis calculer ses coordonnées.
2. Montrer que l'abscisse du point A est $x = 1$.
3. Calculer les coordonnées du point B et du troisième point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$ n'apparaissant pas ci-contre.
4. Montrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont tangentes au point A.
5. Calculer l'aire de la partie grisée.

Partie B

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$ dont les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont esquissées ci-contre.



Soit un point D d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}_f$ compris entre les points O et A. Soit également le point F de la courbe $\mathcal{C}_g$ de même abscisse que D.

Calculer l'abscisse x pour que l'aire du triangle FOD soit maximale.